数理解析研究所講究録
15巻 1966年 1-6

Schrödinger operatorの負の固有値について

東京大学理学部　今 野 礼 二 *)

§1 Introduction

三次元空間における一体問題の Schrödinger 作用素

$$-\Delta + q(x)$$

の負の固有値（物理的にいえば bound states）が，いかなるときに有限個のみであるか，という問題について，J. Schwinger は一つの十分条件を与えた。（文献〔1〕）
すなわち

$$k(x, y) = \frac{|q(x)|^{\frac{1}{2}}|q(y)|^{\frac{1}{2}}}{|x-y|} \tag{1.1}$$

なる kernel をもつ $L^2(R^3)$ の作用素 K が Hilbert-Schmidt 型であれば，上記の有限性がなりたち

$$-\Delta + q(x) \quad \text{の負の固有値の多重度の総和}$$

$$\leq \|K\|^2_{H.S.} \equiv \iint_{R^3\times R^3} |k(x,y)|^2 dx\,dy \tag{1.2}$$

なる評価式が成立することを主張した。（固有値の有限性のみを示すには，K が完全連続作用素であれば十分である）。

Schwinger の論法は，数学的にみれば厳密性を欠くが，結果は正しいことが示される。以下このことを目標にして論ずるのであるが，そのためには，問題を抽象化しておくことが便利でありより一般でもある。すなわち抽象的な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ においてあたえられた H_0 をもとにして，H_1 を，resolvent 方程式を通して定義し，適当な仮定のもとに H_1 の固有値を論ずることに

---

* 現在　専修大学文学部勤務

する。このさい，形式的には $H_1 = H_0 + B^* A$ とおいたことに相当しており，Kato〔2〕，Kuroda〔4〕などにみられるものと共通した定義を採用しているが，方法的にも，上記の研究とある意味で一貫したものといえる。

§2 仮定と定理

$\mathcal{H}$をHilbert空間，H_0 は$\mathcal{H}$の自己共役作用素，H_0 の resolvent set はaを一端とする実軸上の開区間Iを含むものとする。（$a = \pm\infty$ であってもよい） A，Bは$\mathcal{H}$の閉作用素とする。

$\mathcal{D}(T)$，$\rho(T)$，$\sigma(T)$，$\sigma_p(T)$ をそれぞれ作用素Tの定義域，resolvent set，spectrum，point spectrum とし，特にTがdensely defined な有界作用素のとき $[T]^\sim$ によってその閉拡大をあらわす。また，$R_0(z)$ は $(H_0 - z)^{-1}$ とする。

<u>仮　定1</u>

$$\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$$

<u>仮　定2</u>　　$x, y \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ に対し

$$(Ax, By) = (Bx, Ay)$$

<u>仮　定3</u>　　$z \in \rho(H_0)$ に対し，$A R_0(z) B^*$ は完全連続作用素 $Q(z)$に拡張される。

<u>仮　定4</u>　　$\lambda \in I$，$\lambda \to a$ のとき，$Q(\lambda)$は，ある作用素 $Q(a)$に，作用素のnorm の意味で収束する。

<u>仮　定5</u>　　$1 + Q(z)$ が逆をもつような $z \in \rho(H_0)$ が存在する。

<u>定　義</u>　　$1 + Q(z)$ に逆があるようなzに対し

$$R_1(z) = R_0(z) - [R_0(z) B^*]^\sim (1 + Q(z))^{-1} A R_0(z) \tag{2.1}$$

仮定1〜4のもとに，$R_1(z)$ はある自己共役作用素 H_1 のresolventであることが示される。しかも $H_1 \supset H_0 + B^* A$ である。（Kato〔2〕をみよ）。

定　理1　仮定1〜5のもとに，$\sigma(H_1) \cap I$ は孤立した有限多重度の固有値のみからなりしかもaを集積点としない。

系　仮定4がIの両端に対してなりたてば，$\sigma(H_1) \cap I$ は有限集合である。

定　理2　H_0 が非負かつA＝Bであって，仮定1〜3およびnormの意味で

$$\lambda \uparrow 0 \quad のとき \quad Q(\lambda) \to K$$

なるKがあれば，H_1 が定義されて，しかも $\sigma(H_1) \cap (-\infty, 0)$ は有限個の有限多重度の固有値のみからなり，その多重度の総和は，Kの−1より小さい固有値の多重度の総和に等しい。

系　特にKがHilbert-Schmidt型ならば

$$\sigma(H_1) \cap (-\infty, 0) \text{ の総多重度}$$

$$\leq (\text{K の Hilbert-Schmidt norm})^2$$

注　意　$H_0 = -\Delta$，$A = |q(x)|^{1/2}$，
$B = \mathrm{sign}\, q(x) |q(x)|^{1/2}$，$q \in L^{3/2}$ であれば定理2の結論がなりたつ。しかもこの場合 $K = A H_0^{-1} B$ かつKはHilbert-Schmidt型であるから，（1.2）は正しい。

§3　定理の証明の概要

証明の手段として，パラメータ τ に依存する作用素 H_τ を考える。

仮定5は，τ が1に近ければ1を $1/\tau$ でおきかえたものについてもなりたつので，同じく（2.1）の右辺において1を $1/\tau$ でおきかえたものによって $R_\tau(z)$ を定義できる。このとき $R_\tau(z)$ は τ を固定すれば，たかだか可算個のzを除いて $\rho(H_0)$ いたるところに存在し，zを固定すれば τ についてanalytic である。したがって H_τ が存在して $R_\tau(z) = (H_\tau - z)^{-1}$，$H_\tau$ はいわゆるregular perturbation である。（〔3〕を参照）。

補　題　$z \in \rho(H_0)$ および H_τ の存在する τ については

$$z \in \rho(H_\tau) \iff -\frac{1}{\tau} \in \rho(Q(z))$$

$$z \in \sigma_p(H_\tau) \iff -\frac{1}{\tau} \in \sigma_p(Q(z)) \quad .$$

第2の主張において，固有値としての多重度は双方相等しい。

この補題は文献〔4〕 Remark 7.1 の系としてもえられるが，直接示すには次のようにすればよい。

$z \in \sigma_p(H_\tau)$ とすれば $v \neq 0$ があって，$-1/\tau \in \rho(Q(z_0))$ なる z_0 をえらんで

$$A R_0(z)\, v = (z-z_0) A R_0(z)\, R_\tau(z_0)\, v \quad .$$

とできる。$R_\tau(z_0)$ の定義と，$u = [\,1/\tau + Q(z_0)\,]^{-1} A R_0(z_0)\, v$ なるおきかえによって

$$-\frac{1}{\tau} u = Q(z)\, u$$

をよび $u = 0 \Rightarrow v = 0$ をうる。逆も同様である。他の主張もこのことから容易にえられる。

以下τは実数とする。1の近傍で H_τ は定義されるから，σを適当にえらんで，

$$\Lambda = \{(\tau, \lambda)\,;\, \sigma < \tau \leq 1,\ \lambda \in \sigma_p(H_\tau) \cap I\}$$

$$F = \{\tau\,;\,(\tau, a) \text{ が}\Lambda\text{の集積点}\}$$

とすれば

命　題　Fの点τは

$$-\frac{1}{\tau} \in \sigma_p(Q(a))$$

をみたす。したがってFは有限集合

証　明　$\Lambda \ni \{\tau_n, \lambda_n\} \to \{\tau, a\}$ とすると，$\|u_n\| = 1$ なる $u_n, n = 1, 2, \cdots$ が存在して

$$-u_n = \tau_n Q(\lambda_n)$$

$$= [\tau_n Q(\lambda_n) - \tau Q(a)] u_n + \tau Q(a) u_n .$$

仮定4から第1項→0，第2項は部分列が収束。よって u_n の部分列はあるuに収束し，$\|u\| = 1$かつ $-u = \tau Q(a) u$.　Q.E.D.

定理1の証明　一般性を失わずにaがIの下端であるとしてよい。定理の前半は周知であろう。$\lambda_0 \in I$ を任意にえらべれば，$-1/\tau \in \sigma_p(Q(\lambda_0))$ なる τ はやはり有限個しかないから，ある $\tau_0 \geq \sigma$ があって，区間 $(\tau_0, 1)$ がFの点も $-\sigma_p(Q(\lambda_0))^{-1}$ の点も含まないようにできる。τ を動かせば H_τ の固有値は連続的に（実は正則に）動くから，$\tau \in [\tau_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$（$\varepsilon$ は任意の小さな正数）なるかぎり，$\sigma_p(H_\tau) \cap (a, \lambda_0)$ は $(a + \delta, \lambda_0)$ の内部にあるように δ をとれる。z平面上に $a + \delta$ および λ_0 でのみ実軸を切る閉曲線 Γ をとれば，

$$E_\tau(\lambda_0 - 0) - E_\tau(a) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\tau(z)\, dz \qquad (2.2)$$

（ただし $H_\tau = \int \mu \, dE_\tau(\mu)$ ，　$E_\tau(\mu)$ は右連続）は τ につきnorm の意味で連続であり，したがって，よく知られているように，その次元は一定（いまの場合は有限）である。ε は任意だったから，この次元は $(\tau_0, 1)$ で一定であるが，もしも H_1 がaに集積する固有値をもてば，その任意の個数をかこむ閉曲線について（2.2）と同じ積分をすることにより任意に指定された数より大きい次元をもつ τ が1の近くに存在することになって矛盾である。　Q.E.D.

定理2の証明　この場合 $Q(\lambda)$，$(\lambda < 0)$ は自己共役であって，$\lambda \downarrow -\infty$ のとき $\|Q(\lambda)\| \to 0$ なることが示される。すなわち H_τ は $0 \leq \tau \leq 1$ でつねに定義され，τ につき一様に下に有界である。しかも H_τ の負の固有値のなす正則函数 $\lambda(\tau)$ は単調減少である。なぜならもし $\lambda(\tau)$ が $\lambda < 0$ に極値をもてば，その逆函数である $Q(\lambda)$ の固有値 $\theta(\lambda)$ がその点を分岐点とすることになるが，自己共役作用素を値とする正則函数 $Q(\lambda)$ ではこのようなことは起りえないからである。よって

H_τ の固有値はFの点（a=0について）において，$\lambda=0$ に"生じ"単調に減少して $\tau=1$ の線を切る。一方0に十分近い λ_0 について $\sigma_p(Q(\lambda_0))$ をみれば，その−1より小さい固有値の総多重度は $\sigma_p(H_1)\cap(-\infty,0)$ のそれと等しい。この事実と $\lambda_0\uparrow 0$ における $Q(\lambda_0)$ の連続性とから定理2をうる。

なお固有値の有限性については，Birman も form を用いて条件を与えているが，（[5]，[6]），それはわれわれの結果に含まれることが示される。詳細および定理2の，より一般的な形については，文献[7]を参照されたい。

文　献

[1] Schwinger, J., On the bound states of a given potential, Proc. N.A.S. 47 (1961), 122–129.

[2] Kato, T., Wave operators and semilarity for some non-selfadjoint operators, Math. Annalen, 162 (1966) 258–279.

[3] Kato, T., On the convergens of the perturbation method, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section 1, 6 (1951), 145–226.

[4] Kurod. S.T., An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, to appear.

[5] Birman, M.S., On the spectrum of singular boundary problems, Math. Sbor. (new series), T.55 (97) (1961), 123–174.（ロシア語）

[6] 溝畑　茂，偏微分方程式論，岩波書店（1965）.

[7] Kuroda, S.T., Konno, R., On the finiteness of perturbed eigenvalues, to appear.